

FIȘA 10. Grafuri

- 10.1. Grafuri neorientate
- 10.2. Grafuri orientate
- 10.3. Arbori

Pentru fiecare dintre următorii itemi, alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

10.1. Grafuri neorientate

1. Se consideră un graf neorientat cu nodurile: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și muchiile: [1, 3], [1, 7], [2, 6], [3, 7], [5, 2], [5, 6], [8, 4]. Câte componente conexe are graful?
 a. 2 b. 3 c. 8 d. 1
2. Se consideră un graf neorientat cu nodurile: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și muchiile: [1, 3], [1, 7], [2, 6], [3, 7], [5, 2], [5, 6], [8, 4]. Care este numărul minim de muchii ce pot fi adăugate astfel încât graful să devină conex?
 a. 0 b. 2 c. 3 d. 4
3. Se consideră un graf neorientat dat prin matricea de adiacență alăturată. Câte cicluri elementare distincte și de lungime 3 există în graful din enunț? (Două cicluri elementare sunt distincte dacă diferă prin cel puțin o muchie).

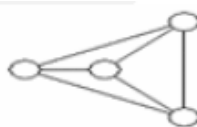
a. 4	b. 0	c. 2	d. 3
------	------	------	------

0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
4. Se consideră un graf neorientat cu nodurile: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și muchiile: [1, 3], [1, 7], [2, 6], [3, 7], [5, 2], [5, 6], [8, 4]. Care este numărul minim de muchii ce pot fi adăugate astfel încât graful să devină conex?
 a. 2 b. 0 c. 3 d. 4
5. Se consideră un graf neorientat cu nodurile: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și muchiile [1, 2], [1, 5], [2, 8], [3, 7], [4, 5], [5, 7], [6, 4], [7, 6], [8, 3], [8, 7]. Care este numărul minim de muchii ce pot fi eliminate astfel încât graful obținut să aibă trei componente conexe?
 a. 3 b. 4 c. 2 d. 5
6. Care este numărul maxim de muchii pe care le poate avea un graf neorientat eulerian cu 10 noduri?
 a. 10 b. 50 c. 40 d. 45
7. Se consideră un graf neorientat G cu 5 noduri dat prin matricea de adiacență alăturată. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:

a. G este graf hamiltonian și graf eulerian	0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 0
b. G este graf hamiltonian, dar nu este graf eulerian	
c. G nu este nici graf hamiltonian, nici graf eulerian	
d. G nu este graf hamiltonian, dar este graf eulerian	
8. Fie G un graf neorientat conex cu 20 de noduri și 99 de muchii. Numărul maxim de muchii ce pot fi eliminate astfel încât graful să rămână conex este:
 a. 50 b. 80 c. 79 d. 81

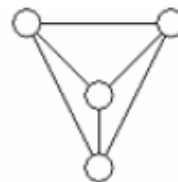
9. Fie $G=(V, E)$ un graf neorientat în care mulțimea nodurilor este $V=\{1, 2, \dots, 20\}$, iar mulțimea muchiilor este $E=\{(i, j) \in V \times V \mid i \bmod 3 = j \bmod 3\}$ (prin $a \bmod b$ am notat restul împărțirii lui a la b). Numărul componentelor conexe ale grafului G este:
- a. 4 b. 3 c. 2 d. 1
10. Fie G un graf neorientat conex cu 100 de vârfuri și 2007 muchii. Numărul maxim de muchii ce pot eliminate din G astfel încât acesta să rămână conex este:
- a. 1907 b. 1007 c. 1237 d. 1908
11. Se consideră un graf neorientat cu 9 noduri și muchiile $[1, 5], [1, 7], [1, 8], [1, 9], [2, 6], [3, 4], [3, 7], [3, 8], [4, 7], [4, 9], [5, 8], [7, 9]$. Pentru acest graf numărul de cicluri distincte de lungime 3 este:
- a. 6 b. 24 c. 10 d. 4
12. Care dintre următoarele grafuri este un graf eulerian, dar **nu** este hamiltonian? Grafurile sunt precizate prin numărul n de noduri și mulțimea U a muchiilor.
- a. $n=3, U=\{[1, 2], [1, 3], [2, 3]\}$
b. $n=4, U=\{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]\}$
c. $n=5, U=\{[1, 3], [1, 4], [3, 4], [2, 4], [4, 5], [2, 5]\}$
d. nici unul din grafurile anterioare.
13. Care este numărul maxim de componente conexe pe care le poate avea un graf neorientat cu 6 noduri și 5 muchii?
- a. 4 b. 2 c. 1 d. 3
14. Fie graful neorientat cu 5 noduri și cu următoarele muchii: $[1, 2], [1, 3], [3, 4], [3, 5], [4, 5]$. Care este numărul minim de muchii ce trebuie adăugate grafului astfel încât, în graful obținut toate nodurile să aibă același grad?
- a. 4 b. 5 c. 6 d. 3
15. Un graf neorientat este eulerian dacă:
- a. este conex și conține cel puțin un ciclu elementar.
b. conține un singur ciclu elementar.
c. este conex și suma elementelor de pe fiecare coloană a matricei de adiacență este număr par.
d. conține cel puțin un ciclu hamiltonian
16. Graful neorientat reprezentat prin listele de adiacență alăturate se transformă în graf orientat astfel: fiecare muchie $[i, j]$, cu $i < j$, devine arcul (i, j) . În graful orientat astfel obținut lungimea celui mai scurt drum de la vârful 1 la vârful 5 este:
- | |
|--------------|
| 1: (2, 3) |
| 2: (1, 3, 5) |
| 3: (1, 2, 4) |
| 4: (3, 5) |
| 5: (2, 4) |
- a. 4 b. 1 c. 2 d. 3
17. Într-un graf neorientat cu 6 noduri oricare două noduri x, y sunt adiacente dacă și numai dacă $x^2 = y^2$. Care este numărul de componente conexe din graf?
- a. 1 b. 6 c. 3 d. 2
18. Matricea de adiacență alăturată corespunde unui graf neorientat care **NU** este de tip:
- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
- a. ciclic b. hamiltonian c. eulerian d. conex

19. Care este numărul **minim** de muchii care trebuie eliminate astfel încât graful alăturat să devină eulerian?



- a. 2 b. 3 c. 1 d. 0

20. Care este numărul **maxim** de muchii care pot fi eliminate astfel încât graful parțial obținut să nu conțină noduri izolate?



- a. 4 b. 5 c. 2 d. 3

10.2. Grafuri orientate

1. Se consideră un graf orientat cu 6 noduri numerotate cu $1, 2, \dots, 6$ și cu mulțimea arcelor formată **doar** din arcele:

- de la fiecare nod numerotat cu un număr neprim $1 < i < 6$ la toate nodurile numerotate cu numere ce aparțin mulțimii divizorilor proprii ai lui i (divizori diferiți de 1 și de i);
- de la nodul numerotat cu 1 la nodul numerotat cu 2 ;
- de la fiecare nod numerotat cu un număr prim $1 < i < 6$ la nodul numerotat cu $i+1$.

Stabiliți care este numărul de circuite elementare distincte conținute de graful din enunț. (Două circuite sunt distincte dacă diferă prin cel puțin un arc).

- a. 1 b. 2 c. 3 d. 0

2. Se consideră un graf orientat cu 6 noduri numerotate cu $1, 2, \dots, 6$ și cu mulțimea arcelor formată **doar** din arcele:

- de la fiecare nod numerotat cu număr neprim $1 < i < 6$ la toate nodurile numerotate cu numere ce aparțin mulțimii divizorilor proprii ai lui i (divizori diferiți de 1 și de i);
- de la nodul numerotat cu 1 la nodul numerotat cu 2 ;
- de la fiecare nod numerotat cu un număr prim $1 < i < 6$ la nodul numerotat cu $i+1$.

Stabiliți câte noduri din graf au suma dintre gradul intern și cel extern egală cu 3 .

- a. 1 b. 6 c. 2 d. 0

3. Un graf orientat are 8 arce și fiecare nod al grafului are gradul interior un număr nenul. Doar **două** dintre noduri au gradul interior un număr par, restul nodurilor având gradele interioare numere impare. Care este numărul maxim de noduri pe care poate să le aibă graful?

- a. 7 b. 8 c. 5 d. 6

4. Câte dintre nodurile grafului orientat cu 6 noduri și cu matricea de adiacență alăturată au gradul interior egal cu gradul exterior?

0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0

- a. 2 b. 1 c. 4 d. 3

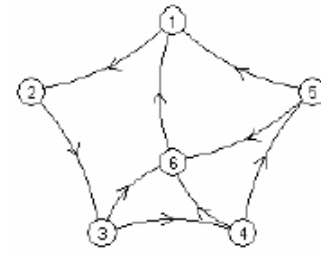
5. Considerând graful orientat G cu 6 noduri reprezentat prin intermediul listelor de adiacență alăturate, stabiliți câte dintre vârfurile sale au gradul intern egal cu gradul extern:

1:	5
2:	-
3:	2 4
4:	2 3
5:	2 4
6:	1 2 3 4 5

- a. 4 b. 1 c. 3 d. 2

6. Fie graful orientat $G=(V, E)$ unde mulțimea nodurilor este $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, iar mulțimea arcelor este $E=\{[1, 2], [1, 6], [2, 5], [2, 6], [3, 4], [4, 3], [6, 2], [6, 5], [3, 7], [4, 7]\}$. Numărul nodurilor grafului G care au gradul exterior egal cu 0 este:
- a. 1 b. 3 c. 0 d. 2
7. Fie $G=(V, E)$ un graf orientat în care mulțimea nodurilor este $V=\{1, 2, \dots, 10\}$, iar mulțimea arcelor este $E=\{(i, j) \in V \times V \mid i \neq j \text{ și } j \bmod i = 0\}$ (prin $a \bmod b$ am notat restul împărțirii lui a la b). Stabiliți care dintre următoarele afirmații este adevărată:
- a. Pentru oricare pereche de noduri i și j ($i \neq j$) există cel puțin un drum de la i la j și cel puțin un drum de la j la i
b. pentru orice nod al grafului G suma dintre gradul interior și gradul exterior este nenulă
c. toate vârfurile grafului G au gradul interior egal cu gradul exterior
d. graful G conține circuite
8. Fie graful orientat cu 5 vârfuri și următoarele arce: $[1, 2], [1, 4], [3, 1], [3, 2], [4, 5], [4, 2], [5, 1]$. Câte circuite conține acest graf?
- a. 3 b. 4 c. 2 d. 1
9. Se consideră graful orientat dat prin matricea de adiacență alăturată. Care este lungimea maximă a unui drum elementar de la vârful 1 până la vârful 5?
- | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
- a. 4 b. 3 c. 1 d. 5
10. Un graf orientat este reprezentat prin matricea de adiacență dată alăturat. Precizați care sunt nodurile pentru care gradul interior este mai mare decât gradul exterior.
- | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
- a. 2, 4, 5 b. 2, 4, 5, 6 c. 1, 4, 5 d. 1, 3, 6
11. Într-un graf orientat cu 10 vârfuri numerotate de la 1 la 10 există arce numai între perechile de vârfuri i și j , $i \neq j$ cu proprietatea că i este divizor al lui j (i fiind extremitatea inițială și j extremitatea finală a arcului). Numărul de valori egale cu 1 din matricea de adiacență corespunzătoare grafului este:
- a. 17 b. 10 c. 30 d. 34
12. Lungimea unui drum elementar într-un graf orientat cu n vârfuri poate fi:
- a. ∞ b. $n+1$ c. n d. $n-1$
13. Suma gradelor interne ale tuturor vârfurilor unui graf orientat este întotdeauna egală cu:
- a. numărul valorilor de 1 aflate sub diagonala principală în matricea de adiacență
b. suma tuturor valorilor aflate deasupra diagonalei principale în matricea de adiacență
c. produsul gradelor externe ale tuturor vârfurilor grafului
d. suma gradelor externe ale tuturor vârfurilor grafului
14. Care este numărul minim de arce care trebuie adăugate grafului orientat din figura alăturată astfel încât oricare două vârfuri să fie unite prin drumuri elementare?
-
- a. 1 b. 3 c. 0 d. 2

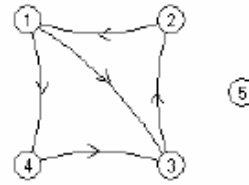
15. Considerând graful orientat din figura alăturată, stabiliți câte dintre vârfurile grafului au gradul extern (exterior) egal cu dublul gradului intern (interior).



- a. 2 b. 1 c. 0

d. 3

16. Considerând graful orientat din figura alăturată, stabiliți câte dintre vârfurile grafului au gradul extern (exterior) egal cu gradul intern (interior).



- a. 2 b. 3 c. 1

d. 0

10.3. Arbori

1. Care dintre următoarele matrice este matricea de adiacență a unui arbore cu 4 noduri?

- | | | | | | | | |
|----|--|----|--|----|--|----|--|
| a. | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ | b. | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | c. | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | d. | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
|----|--|----|--|----|--|----|--|

2. Considerăm un arbore G cu 7 noduri care are matricea de adiacență alăturată. Stabiliți care dintre următorii vectori este un vector de tați al arborelui dat:

- a. $(0, 1, 1, 1, 3, 5, 5)$
 b. $(0, 1, 3, 1, 1, 5, 5)$
 c. $(0, 1, 5, 5, 3, 3, 5)$
 d. $(0, 1, 1, 1, 5, 3, 3)$

0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0

3. Fie $G=(V, E)$ un arbore în care $V=\{1, 2, \dots, n\}$. Știind că și $G'=(V \cup \{n+1\}, E')$ este deasemenea un arbore, stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată (notația $|M|$ reprezintă numărul elementelor unei mulțimi M):

- a. $|E'| = |E|$ b. $|E'| = |E| + 1$ c. $|E'| = |E| - 1$ d. $|E'| = |E| + 2$

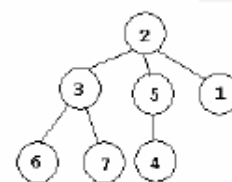
4. Fie G un graf neorientat conex cu 100 de noduri și 2007 muchii. Numărul de muchii care trebuie eliminate din G astfel încât acesta să devină arbore este:

- a. 1237 b. 1907 c. 1007 d. 1908

5. Fie arborele $G=(V, E)$ în care mulțimea vârfurilor este $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, iar mulțimea muchiilor este $E=\{[1, 3], [1, 4], [2, 1], [2, 5], [3, 7], [4, 8], [4, 9], [5, 6], [9, 10]\}$. Considerând vârful 1 rădăcina arborelui, vectorul de tați corespunzător arborelui G este:

- a. $T=(0, 1, 1, 3, 1, 5, 3, 4, 9, 4)$ b. $T=(0, 1, 1, 1, 3, 5, 3, 4, 4, 4)$
 c. $T=(0, 1, 1, 1, 5, 2, 4, 3, 4, 9)$ d. $T=(0, 1, 1, 1, 2, 5, 3, 4, 4, 9)$

6. Pentru arborele cu rădăcină din figura alăturată vectorul de "tați" este:



- a. 0 5 7 4 0 0 3 b. 0 5 7 0 4 3 3 c. 2 0 2 5 5 3 3 d. 2 0 2 5 2 3 3

7. Pentru care dintre următorii arbori cu rădăcină, memorați cu ajutorul vectorilor de tați, nodurile 4, 6 și 9 sunt singurii descendenți direcți ai nodului 3?
- a. $tata = (3, 3, 4, 0, 2, 3, 4, 4, 4)$ b. $tata = (6, 4, 9, 0, 3, 3, 3, 3, 3)$
c. $tata = (2, 0, 2, 3, 2, 3, 4, 4, 3)$ d. $tata = (0, 3, 1, 3, 2, 3, 4, 4, 3)$
8. Într-un arbore binar (un arbore binar este un arbore în care fiecare nod are cel mult doi descendenți direcți), un lanț care unește rădăcina cu oricare din nodurile frunză, conține cel mult $n-1$ muchii. Care este numărul maxim de noduri dintr-un astfel de arbore?
9. Care dintre următorii vectori poate reprezenta vectorul de tați al unui arbore cu rădăcină?
- a. $(5, 7, 1, 1, 0, 7, 7, 12, 1, 12, 4, 7)$ b. $(5, 7, 1, 1, 0, 7, 0, 12, 1, 12, 4, 7)$
c. $(5, 7, 1, 1, 0, 7, 5, 12, 1, 12, 4, 7)$ d. $(0, 7, 1, 1, 8, 7, 5, 12, 1, 12, 4, 7)$
10. Se consideră arborele cu 14 noduri având următoarele muchii: $[3, 4]$, $[4, 14]$, $[14, 13]$, $[4, 5]$, $[1, 5]$, $[5, 7]$, $[2, 7]$, $[6, 7]$, $[6, 9]$, $[8, 9]$, $[9, 12]$, $[11, 12]$, $[10, 12]$. Care dintre vectorii următori reprezintă vectorul de tați al arborelui dat?
- a. $(5, 7, 4, 5, 0, 7, 5, 9, 6, 12, 12, 11, 14, 4)$ b. $(5, 7, 4, 0, 4, 7, 5, 9, 6, 0, 12, 9, 14, 4)$
c. $(0, 7, 4, 5, 1, 7, 5, 9, 6, 11, 12, 9, 14, 4)$ d. $(5, 7, 4, 5, 7, 9, 6, 9, 12, 12, 12, 0, 14, 4)$
11. Un graf neorientat cu n noduri, cu n număr impar mai mare decât 2, în care fiecare nod are gradul $n-1$, este întotdeauna :
- a. graf aciclic (graf care nu conține nici un ciclu) b. arbore
c. graf neconex d. graf eulerian
12. Care este gradul maxim posibil al unui nod dintr-un arbore cu n noduri?
- a. $n-1$ b. $n/2$ c. 2 d. n
13. Care este numărul minim de muchii care pot fi eliminate din graful neorientat, dat prin listele de adiacență alăturate, astfel încât graful să devină eulerian?
- | | |
|--------------|--------------|
| 1: (2, 3, 5) | 2: (1, 4) |
| 3: (1, 4, 5) | 4: (2, 3, 5) |
| 5: (1, 3, 4) | |
- a. 1 b. 2 c. 3 d. 0
14. Un graf neorientat este graf complet dacă și numai dacă oricare două noduri sunt adiacente. Care este numărul de muchii care trebuie eliminate dintr-un graf neorientat complet cu 8 noduri, astfel încât graful parțial obținut să fie arbore?
- a. 8 b. 21 c. 16 d. 20
15. Într-un arbore cu exact 8 noduri rădăcina, reprezentată de nodul 1, se află pe nivelul 1 și fiecare nod al arborelui are cel mult 2 descendenți direcți. Care este înălțimea minimă posibilă pentru un astfel de arbore? (Înălțimea unui arbore=numărul maxim de muchii de la rădăcină la un vârf terminal)
- a. 4 b. 3 c. 2 d. 1
16. Care dintre următoarele șiruri de numere reprezintă gradele nodurilor unui arbore cu 5 noduri?
- a. 1, 1, 3, 1, 0 b. 4, 1, 5, 1, 2
c. 4, 3, 2, 1, 1 d. 2, 1, 1, 3, 1
17. Se consideră vectorul de tați al unui arbore oarecare $t = (0, 3, 1, 3, 1)$, în care nodurile sunt numerotate cu 1, 2, 3, 4, 5. Alegeți afirmația **incorectă** :
- a. nodurile 3 și 5 sunt frați b. nodul 1 este rădăcină
c. nodul 3 este fiul nodului 2 d. nodurile 2, 4, 5 sunt frunze
18. Se consideră vectorul de tați al unui arbore oarecare $t = (0, 3, 1, 3, 1, 5)$, în care nodurile sunt numerotate de la 1 la 6. Alegeți afirmația **corectă** :
- a. nodurile 2, 4, 6 sunt frați b. nodul 5 are gradul 1
c. nodul 3 este tatăl nodului 1 d. nodurile 2, 4 și 6 sunt frunze

19. Care dintre matricele de adiacență de mai jos corespunde unui arbore cu 4 noduri?

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

20. Numărul de noduri ale unui arbore cu 100 de muchii este:

a. 101

b. 99

c. 100

d. 50